TEST DE SELECŢIE PENTRU OLIMPIADA INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ ŞI OLIMPIADA BALCANICĂ DE MATEMATICĂ

¶1 Fie a_1, a_2, a_3, a_4 lungimile laturilor unui patrulater şi s semiperimetrul său. ($s = \sum a_k/2$). Demonstraţi că

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{s+a_i} \leq \frac{2}{9} \sum_{1\leq i<j\leq 4} \frac{1}{\sqrt{(s-a_i)(s-a_j)}}$$

Determinaţi cazurile de egalitate.

¶2 Fie (D_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ o mulţime finită de suprafeţe dreptunghiulare închise şi disjuncte din plan având laturile paralele cu axele de coordonate carteziene. Se ştie că aria acoperită de ele este cel puţin 4 şi proiecţia pe Ox a figurii formate de ele este un interval.

Să se demonstreze că există trei puncte în $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ care determină un triunghi cu aria 1.

¶3 Să se determine funcţiile injective $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ pentru care

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}.$$

¶4 În planul complex se consideră un disc D. Fie n un număr natural $n \geq 2$. Arătaţi că pentru orice $z_1, z_2, \ldots, z_n \in D$ există $z \in D$ astfel ca $z^n = z_1 z_2 \cdots z_n$.

SELECŢIE PENTRU OLIMPIADA BALCANICĂ DE MATEMATICĂ

juniori

¶1 Să se determine numerele reale pozitive a, b, c pentru care

$$4(ab + bc + ca) - 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3).$$

¶2 Definim numerele $a_n = 3n + \sqrt{n^2 - 1}$ şi $b_n = 2(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n})$ pentru $n = 1, 2, \ldots, 49$.
Să se arate că există numerele întregi A, B astfel încât

$$\sqrt{a_1 - b_1} + \sqrt{a_2 - b_2} + \cdots + \sqrt{a_{49} - b_{49}} = A + B\sqrt{2}.$$

¶3 Fie V un punct exterior unui cerc de centru O şi T_1, T_2 punctele de tangenţă ale tangentelor din V la cerc. Fie T un punct arbitrar pe arcul mic T_1T_2. Tangenta în T la cerc taie dreapta VT_1 în punctul A iar dreptele TT_1 şi VT_2 se intersectează în B. Notăm cu M intersecţia dreptelor TT_1 şi AT_2.

Să se demonstreze că dreptele OM şi AB sunt perpendiculare.

¶4 În două vârfuri M şi N ale unui cub se scrie numărul 1, iar în celelalte şase se scrie numărul 0. Se numeşte *mişcare* alegerea unui vărf şi mărirea cu o unitate a numerelor scrise în cele trei vârfuri adiacente acestuia.

Să se arate că există o alegere a mişcărilor astfel încât să se ajungă la acelaşi număr în toate vârfurile dacă şi numai dacă MN nu este diagonala unei feţe.